TEOREMI E PROBLEMI DI GEOMETRIA ELEMENTARE ORDINATI ALLA...

Raffaele Gentile

TEOREMI E PROBLEMI

DI

GEOMETRIA ELEMENTARE

ORDINATI ALLA QUADRATURA DEI POLIGONI

DA

R. GENTILE

PER LA SCUOLA DI UMANITÀ

DI

MONTE-CASSINO

TIPOGRAFIA
DI MONTE-CASSINO
1864

DEFINIZIONI

Un solido ha per termine una superficie; due parti contigue di una superficie, tali cioè che l'una finisce dove l'altra comincia, hanno per termine comune una linea; due parti contigue di una linea hanno per termine comune un punto. Un solido indefinito avendo due punti fissi può girare intorno a quelli e ritornare alla prima posizione; dei punti del solido altri si muovono descrivendo linee chiuse uniformi, le quali si chiamano circonferenze, altri restano immobili formando una linea indefinita uniforme, la quale chiamasi linea retta. Piana è quella superficie su cui cade tutta una linea retta che ne congiunge due punti dovunque presi.

L'angolo è lo spostamento di una retta la quale sopra un piano gira intorno ad una estremità; la prima e l'ultima posizione della retta mobile sono i lati dell'angolo, il punto fisso è il vertice. Una retta insistendo sopra un'altra retta si dice perpendicolare a quella, quando i due angoli adiacenti sono eguali, e questi due angoli si dicono retti; quindi l'angolo retto è la metà dell'angolo che ha i lati direttamente opposti. Un angolo acuto è minore dell'angolo retto, un angolo ottuso è maggiore. Due angoli si dicono l'uno complemento dell'altro, quando fanno insieme un angolo retto.

Se una retta finita striscia sopra un piano, toccando con una estremità una retta indefinita, e tenendosi perpendicolare a quella, è manifesto che l'altra estremità descriverà una retta indefinita, cui parimente sarà perpendicolare la retta finita; le due rette indefinite si dicono parallele. Una retta può essere perpendicolare ad un'altra retta in una sola direzione; perciò due rette perpendicolari ad una medesima retta sono parallele.

Il triangolo è una superficie piana terminata da tre linee rette; il triangolo è scaleno se ha i tre lati diseguali — isoscele se ha due lati eguali — equilatero se ha i tre lati eguali.

Il quadrilatero è una superficie piana terminata da quattro linee rette. Il trapezio è un quadrilatero con due lati opposti paralleli. Il parallelogrammo è un quadrilatero coi lati opposti paralleli. Il rettangolo è un parallelogrammo coi quattro angoli retti. Il quadrato è un parallelogrammo coi quattro angoli retti e coi quattro lati eguali.

Una superficie piana terminata da più di quattro linee rette ha il nome generale di poligono.

Due poligoni si dicono equivalenti quando si compongono di parti eguali, le une alle altre, diversamente disposte.

Il cerchio è una superficie piana terminata da una circonferenza, cioè da una linea la quale ha i punti equidistanti da un punto interno; questo punto è il centro del cerchio; raggio è qualunque retta che va dal centro alla circonferenza; diametro è qualunque retta che congiunge due punti della circonferenza e passa pel centro; arco è una parte della circonferenza; corda è la retta che congiunge i due termini dell'arco.

TEOREMA I.

Due triangoli sono eguali se hanno un angolo eguale tra due lati eguali.

I due triangoli ABC, DEF (fig. 1) sono eguali se hanno l'angolo BAC eguale all'angolo EDF, il lato AB eguale al lato DE, il lato AC eguale al lato DF.

Applicando il triangolo ABC sul triangolo DEF in modo che il punto A cáda sul punto D e la retta AB sulla retta DE, cadrà la retta AC sulla retta DF perchè gli angoli BAC, EDF sono eguali, e i punti B, C sui punti E, F, e quindi la retta BC sulla retta EF, perchè i lati AB, AC sono eguali ai lati DE, DF.

SCOLIO GENERALE. A lati eguali si oppongono angoli eguali, e reciprocamente.

TEOREMA II.

Due triangoli sono eguali se hanno un lato eguale adiacente a due angoli eguali.

I due triangoli ABC, DEF sono eguali (fig. 1) se hanno il lato AB eguale al lato DE, l'angolo BAC eguale all'angolo EDF, l'angolo ABC eguale all'angolo DEF.

Applicando il triangolo ABC sul triangolo DEF in modo che il punto A cada sul punto D e la retta AB sulla retta DE, cadrà il punto B sul punto E perchè i lati AB, DE sono eguali, le rette AC, BC sulle rette DF, EF perchè gli angoli BAC, ABC sono eguali agli angoli EDF, DEF.

TEOREMA III.

I due angoli alla base di un triangolo isoscele sono eguali.

Se il triangolo ABC ha i lati AB, AC eguali (fig. 2), la retta AD che dimezza l'angolo BAC dividerà il triangolo ABC in due triangoli eguali ADB, ADC (T. I); perciò i due angoli ABD, ACD opposti al lato comune AD saranno eguali.

COROLLARIO I. Per la stessa eguaglianza dei due triangoli ADB, ADC le due rette DB, DC saranno eguali, e li due angoli ADB, ADC saranno eguali e retti.

COROLLARIO II. Essendo unico il punto medio di una retta, nel triangolo isoscele la retta che dal vertice scende al punto medio della base divide ancora l'angolo per metà, e quindi la è perpendicolare alla base.

COROLLARIO III. Essendo unica la direzione di una retta perpendicolare ad un'altra retta, nel triangolo isoscele la perpendicolare che si leva dal punto medio della base passa pel vertice.

TEOREMA IV.

Due triangoli sono eguali se hanno i lati eguali.

I due triangoli ABC, DEF sono eguali (fig. 3) se hanno AB = DE, AC = DF, BC = EF.

Al triangolo ABC si dia la posizione DEG, ponendo il punto A sul punto D e il lato AB sul lato eguale DE, e si conduca la retta GF. Essendo nel triangolo isoscele DGF i due angoli DGF, DFG eguali, e nel triangolo isoscele EGF i due angoli EGF, EFG eguali, sarà l'angolo DGE eguale all'angolo DFE, ed il triangolo DEG o ABC eguale al triangolo DEF (T. I).

TEOREMA V.

Una è la perpendicolare che da un punto si può condurre ad una linea retta.

Sia il punto A e la retta BC (fig. 4). Se la parte ABC del piano girasse intorno alla retta BC per applicarsi sulla parte opposta, il punto A prenderebbe una certa posizione D. Ora nel punto E dove la retta AD taglia la BC, gli angoli eguali AEC, DEC sono retti; in qualunque altro punto F della retta BC gli angoli eguali AFC, DFC non sono retti, perchè l'angolo totale AFD non ha i lati direttamente opposti. Dunque la retta AE è l'unica perpendicolare che dal punto A si possa condurre alla retta BC.

COROLLARIO — Se un triangolo ha un angolo ottuso o retto, gli altri due angoli saranno acuti. Un triangolo si dice ottusangolo, o rettangolo, o acutangolo, quando ha un angolo ottuso, o un angolo retto, o tutti tre gli angoli acuti. Nel triangolo rettangolo il lato opposto all'angolo retto si chiama ipotenusa.

TEOREMA VI.

Due triangoli rettangoli sono eguali se hanno la ipotenusa eguale ed un angolo acuto eguale.

I due triangoli ABC, DEF sono eguali (fig. 5) se avendo gli angoli ACB, DFE retti, hanno altresì le ipotenuse AB, DE eguali, e gli angoli acuti ABC, DEF eguali.

Applicando il triangolo ABC sul triangolo DEF in modo che il punto A cada sul punto D e la retta AB sulla retta DE, cadrà il punto B sul punto E, perchè i lati AB, DE sono eguali, la retta BC sulla retta

EF, perchè gli angoli ABC, DEF sono eguali, e la retta AC sulla retta DF, perchè una sola perpendicolare si può condurre dal punto D alla retta EF.

TEOREMA VII.

Due rette intersecandosi fanno gli angoli opposti eguali

Intersecandosi le due rette AB, CD nel punto E (fig. 6), due angoli conseguenti AEC, CEB fanno insieme l'angolo AEB eguale a due angoli retti; due angoli opposti AEC, BED sono eguali, perchè sì all'uno come all'altro, per fare due angoli retti, manca lo stesso angolo BEC.

TEOREMA VIII.

Due rette parallele fanno con una secante 1° gli angoli alterni eguali, 2° gli angoli corrispondenti eguali, 3° la somma di due angoli esterni o interni, dalla stessa parte, eguale a due retti.

Le due rette parallele AB, CD secate dalla retta EF nei punti G, H (fig. 7) fanno 1° gli angoli alterni AGH, GHD eguali, 2° gli angoli corrispondenti EGB, GHD eguali, 3° la somma dei due angoli BGH, GHD, interni dalla stessa parte, eguale a due retti.

La perpendicolare comune delle due parallele s'intenda passare pel punto medio I della retta GH, e sia la retta KL.

1° I due angoli alterni AGH, GHD sono eguali, perchè i due triangoli rettangoli IGK, IHL sono eguali, avendo le ipotenuse IG, IH eguali, e gli angoli acuti GIK, HIL eguali.

2° I due angoli corrispondenti EGB, GHD sono eguali, perchè i due angoli EGB, AGH sono eguali.

3° I due angoli BGH, GHD interni dalla stessa parte fanno la stessa somma dei due angoli conseguenti BGH, AGH, cioè due angoli retti.

TEOREMA IX.

Due rette sono parallele se fanno con una secante 1° due angoli alterni eguali, 2° o due angoli corrispondenti eguali 3° o la somma di due angoli esterni o interni, dalla stessa parte, eguale a due retti.

Se le due rette AB, CD (fig. 7) fanno con la secante EF nei punti G, H due angoli alterni AGH, GHD eguali, qualunque altra retta condotta pel punto H non farà due angoli alterni eguali; perciò la retta CD è la parallela della retta AB.

Così per le due altre condizioni.

TEOREMA X.

I tre angoli di un triangolo fanno insieme due angoli retti; e prolungando un lato, l'angolo esterno sarà la somma dei due interni ed opposti.

Sia il triangolo ABC (fig. 8); condotta pel vertice A la retta DE parallela al lato BC, i due angoli ABC, ACB saranno eguali ai loro alterni DAB, EAC, e perciò la somma dei tre angoli del triangolo ABC sarà la somma dei tre angoli DAB, BAC, CAE, cioè due angoli retti.

Prodotto il lato BC verso F, l'angolo esterno ACF sarà eguale al suo alterno DAC, e perciò sarà la somma dei due angoli CBA, CAB.

COROLLARIO. Nel triangolo rettangolo i due angoli acuti fanno insieme un angolo retto, e perciò l'uno è complemento dell'altro.

TEOREMA XI.

Un angolo inscritto nel semicerchio è retto.

Nel semicerchio ABC sia inscritto l'angolo ABC (fig. 9); prodotto il lato AB verso D, sarà l'angolo CBD somma dei due angoli BAC, BCA (T. X); ma il raggio OB fa gli angoli OBA, OBC eguali agli angoli OAB, OCB (T. III), e la somma dei due angoli OBA, OBC è l'angolo ABC; dunque gli angoli ABC, CBD sono eguali e retti.

TEOREMA XII.

Un parallelogrammo è diviso dalla diagonale in due triangoli eguali.

Il parallelogrammo ABCD (fig. 10) è diviso dalla diagonale AC in due triangoli eguali, perchè il lato AC è comune, gli angoli DAC, ACB sono eguali come alterni delle due parallele AD, BC, e gli angoli BAC, ACD sono eguali come alterni delle due parallele AB, DC.

COROLLARIO. I lati opposti del parallelogrammo sono eguali, e gli angoli opposti.

TEOREMA XIII.

Un quadrilatero è parallelogrammo se ha i lati opposti eguali.

Il quadrilatero ABCD (fig. 10) avendo il lato AB eguale al lato DC, e il lato AD eguale al lato BC, è diviso dalla diagonale AC in due triangoli eguali (T. IV); perciò gli angoli BAC, BCA sono eguali agli angoli

DCA, DAC, e le rette BA, BC sono parallele alle rette DC, DA.

TEOREMA XIV.

Un quadrilatero è parallelogrammo se ha due lati opposti eguali e paralleli.

Il quadrilatero ABCD (fig. 10) avendo due lati opposti AD, BC eguali e paralleli, è diviso dalla diagonale AC in due triangoli eguali, perchè gli angoli DAC, BCA sono eguali come alterni delle due parallele AD, BC, il lato AC è comune, e i lati AD, BC sono eguali per condizione; dunque i lati AB, DC sono eguali, e facendo con la retta AC gli angoli alterni BAC, ACD eguali, sono ancora paralleli.

TEOREMA XV.

Due parallelogrammi costituiti sulla medesima base e nelle medesime parallele sono equivalenti.

I due parallelogrammi ABCD, EBCF (fig. 11 e 12) costituiti sulla medesima base BC e nelle medesime parallele AF, BC sono equivalenti.

Quando i lati AD, EF si compenetrano, come nella fig. 11, i due parallelogrammi hanno il trapezio EBCD comune, e li due triangoli ABE, DCF sono eguali, potendo l'uno coincidere coll'altro mediante una semplice trasposizione parallela.

Quando i lati AD, EF non si compenetrano, come nella figura 12, i due parallelogrammi hanno il triangolo GBC comune, e li due trapezi ABGD, EGCF si dividono in parti eguali, le une alle altre, togliendo quante volte si può dalla retta BA la retta CG, e dalla retta CF la retta BG, e tirando dai punti divisivi della

retta BA altrettante rette parallele alla retta CF, e dai punti divisivi della retta CF altrettante rette parallele alla retta BA.

TEOREMA XVI.

Due parallelogrammi ABCD, EBFG (fig. 13) costituiti nello stesso angolo B sono equivalenti, se le due rette AF, EC sono parallele.

In fatti la parte EBCH è comune, e le due parti AEHD, HCFG sono equivalenti, perchè il parallelogrammo AEHD equivale all'altro AECI, questo all'altro ECFK, e questo all'altro CFGH.

TEOREMA XVII.

Nel triangolo ABC (fig. 14 e 15) calate le perpendicolari BD, CE dai vertici B, C sui lati opposti AC, AB, il rettangolo delle due rette AC, AD sarà equivalente al rettangolo delle due rette AB, AE.

Nella direzione della perpendicolare BD pongo DF = AC, e compisco il rettangolo ADFG, che sarà quello delle due rette AC, AD; parimente nella direzione della perpendicolare CE pongo EH = AB, e compisco il rettangolo AEHI, che sarà quello delle due rette AB, AE. Il rettangolo GADF equivale al parallelogrammo GABK; il rettangolo IAEH equivale al parallelogrammo IACL; i due parallelogrammi GABK, IACL sono eguali, perchè i lati AG, AB sono eguali ai lati AC, AI, e gli angoli GAB, IAC sono eguali, essendo le due parti GAC, IAB eguali, e la parte BAC comune; dunque i due rettangoli GADF, IAEH sono equivalenti.

TEOREMA XVIII.

In qualunque triangolo ABC (fig. 16) condotte dai vertici A, B, C le perpendicolari AD, BE, CF sui lati opposti, per un angolo ottuso B il quadrato del lato opposto AC sarà quanto il quadrato del lato BA, più il quadrato del lato BC, più due volte il rettangolo contenuto dal lato BA e dalla projezione BF del lato BC, o più due volte il rettangolo contenuto dal lato BC e dalla projezione BD del lato BA; e per un angolo acuto C il quadrato del lato opposto AB sarà quanto il quadrato del lato CA, più il quadrato del lato CB, meno due volte il rettangolo contenuto dal lato CA e dalla projezione CE del lato CB, o meno due volte il rettangolo contenuto dal lato CB e dalla projezione CD del lato CA.

Descrivendo i quadrati BCGH, ACIK, ABLM, sarà il rettangolo DBH equivalente al rettangolo FBL, il rettangolo DCG equivalente al rettangolo ECI, il rettangolo EAK equivalente al rettangolo FAM; ciascun quadrato poi sarà somma o differenza di due rettangoli.

TEOREMA XIX.

Nel triangolo rettangolo il quadrato della ipotenusa è la somma dei quadrati dei lati che comprendono l'angolo retto.

Nel triangolo rettangolo ABC (fig. 17) calata la perpendicolare AD sulla ipotenusa BC, il quadrato del lato AB sarà equivalente al rettangolo delle due rette BC, BD, il quadrato del lato AC sarà equivalente al rettangolo delle due rette CB, CD, e perciò il quadrato della ipotenusa BC sarà la somma dei quadrati dei lati AB, AC che comprendono l'angolo retto.

TEOREMA XX.

Nel triangolo rettangolo il quadrato della perpendicolare calata dal vertice dell'angolo retto sulla ipotenusa equivale al rettangolo dei due segmenti della ipotenusa.

Sia il triangolo rettangolo ABC (fig. 18), e la ipotenusa BC sia divisa dalla perpendicolare AD nei due segmenti DB, DC; il quadrato ADEF della perpendicolare sarà equivalente al rettangolo BDGH dei due segmenti.

I due triangoli ADC, EDG sono eguali, essendo gli angoli ADC, EDG retti, DA = DE, DC = DG; dunque gli angoli CAD, GED sono eguali; ma gli angoli CAD, ABD, amendue complementi dello stesso angolo C, sono eguali; dunque gli angoli ABD, GED sono eguali, le due rette AB, GE sono parallele, ed il quadrato ADEF equivale al rettangolo BDGH (T. XVI).

TEOREMA XXI.

Un rettangolo è quanto il prodotto della base per l'altezza, cioè la quantità del rettangolo comparato all'unità quadrata è il prodotto della quantità della base per la quantità dell'altezza comparate all'unità lineare.

1° Sia il rettangolo ABCD (fig. 19), la base BC=5, l'altezza AB=3. Divisa la base nelle 5 unità, e dai punti divisivi menate altrettante rette parallele all'altezza, il rettangolo ABCD si divide in 5 rettangoli eguali, e generalmente in tanti quante sono le unità della base; divisa l'altezza nelle 3 unità e menate dai punti divisivi altrettante rette parallele alla base, ciascuno dei predetti rettangoli si divide in 3 unità quadrate, e generalmente in tante quante sono le unità dell'altezza; dunque il numero delle unità quadrate

che compongono il rettangolo ABCD è il prodotto del numero esprimente la base pel numero esprimente l'altezza, cioè $3 \times 5 = 15$.

2° Sia $BC = 3\frac{2}{3}$, $AB = 2$ (fig. 20). Divisa la base nelli $\frac{11}{3}$ dell'unità, e l'altezza nelle 2 unità, e menate dai punti divisivi della base altrettante rette parallele all'altezza, e dai pnnti divisivi dell'altezza altrettante rette parallele alla base, il rettangolo ABCD si divide in 11×2 rettangoli eguali; ma 3 di questi rettangoli compongono la unità quadrata; dunque il rettangolo ABCD è $\frac{11 \times 2}{3} = \frac{22}{3} = 7\frac{1}{3}$.

3° Sia $BC = 3\frac{2}{3}$, $AB = 2\frac{4}{5}$ (fig. 21). Divisa la base nelli $\frac{11}{3}$, e l'altezza nei $\frac{14}{5}$, e menate dai punti divisivi della base altrettante rette parallele all'altezza, e dai punti divisivi dell'altezza altrettante rette parallele alla base, il rettangolo ABCD si divide in 11×14 rettangoli eguali; ma 3×5 di questi rettangoli compongono la unità quadrata; dunque il rettangolo ABCD è $\frac{11 \times 14}{3 \times 5} = \frac{154}{15} = 10\frac{4}{15}$.

TEOREMA XXII.

Un parallelogrammo è quanto il prodotto della base per l'altezza.

Sia il parallelogrammo ABCD (fig. 22); inalzate sulla base BC le perpendicolari BE, CF sino alla retta AD, il parallelogrammo ABCD è quanto il rettangolo EBCF, cioè quanto il prodotto della base BC per l'altezza BE.

Esempio. Sia $BC = 15,4$; $BE = 9,28$, sarà il parallelogrammo $ABCD = 15,4 \times 9,28 = 142,912$.

TEOREMA XXIII.

Un triangolo è quanto il semiprodotto della base per l'altezza.

Sia il triangolo ABC (fig. 23); considerando come base il lato BC, l'altezza sarà la perpendicolare AD che si conduce alla base dal vertice opposto. Ora il triangolo ABC è metà del parallelogrammo ABCE, di cui la espressione quantitativa è il prodotto della base BC per l'altezza AD; dunque il triangolo ABC è quanto il semiprodotto della base BC per l'altezza AD.

Esempio. Sia $BC = 4,7$, $AD = 6,3$, sarà il triangolo $ABC = \frac{4,7 \times 6,3}{2} = 14,805$.

TEOREMA XXIV.

Un trapezio è quanto il prodotto della semisomma delle basi parallele per l'altezza.

Sia il quadrilatero ABCD coi lati AD, BC paralleli (fig. 24); condotta pel punto medio E del lato AB la retta GF parallela al lato DC e segante le rette AD, BC nei punti G, F, si forma il parallelogrammo GFCD equivalente al trapezio ABCD, perchè i triangoli AEG, BEF sono eguali, avendo i lati EA, EB eguali, gli angoli opposti AEG, BEF eguali, e gli angoli alterni EAG, EBF eguali; ma il parallelogrammo GFCD è quanto il prodotto della base FC per l'altezza AH, e la base FC è la semisomma delle due basi AD, BC, essendo $FC = GD$, $BF = AG$; dunque il trapezio ABCD è quanto il prodotto della semisomma delle basi AD, BC per l'altezza AH.

Esempio. Sia $AD = 8$, $BC = 12$, $AH = 6$, sarà il trapezio $ABCD = \frac{8 + 12}{2} \times 6 = 60$.

PROBLEMA I.

Per un punto dato tirare una retta perpendicolare ad una retta data.

Quando il punto dato A trovasi sulla retta data BC (fig. 25), taglio la retta BC in due punti D, E con una circonferenza descritta dal centro A, descrivo due altre circonferenze dai centri D, E con uno stesso raggio a discrezione, e dal punto A al punto F dove quelle s'intersecano tiro la retta AF, la quale sarà perpendicolare alla retta BC, perchè nel triangolo isoscele FDE congiunge il vertice col punto medio della base.

Altro modo. Da un punto D fuori della retta BC come centro (fig. 26) e col raggio eguale alla distanza DA descrivo una circonferenza la quale seghi la retta BC nell'altro punto E, segno sulla circonferenza il punto F diametralmente opposto al punto E, e tiro la retta AF, la quale sarà perpendicolare alla retta BC, perchè l'angolo EAF inscritto nel semicerchio è retto (T. XI).

Altro modo. Sulla retta BC (fig. 27) taglio cinque parti eguali, dal centro A col raggio di tre parti descrivo una circonferenza, dal centro D preso sulla retta BC e distante dal punto A per quattro parti descrivo col raggio di cinque parti un'altra circonferenza, e dal punto A al punto E dove le due curve s'intersecano tiro la retta AE, la quale sarà perpendicolare alla retta BC, perchè il quadrato del numero 5 è la somma dei quadrati dei numeri 3 e 4.

Quando il punto A è fuori della retta BC (fig. 28), taglio la retta BC in due punti D, E con una circonferenza descritta dal centro A, descrivo due altre circonferenze dai centri D, E con uno stesso raggio a discrezione, e dal punto A al punto F dove quelle s'intersecano tiro la retta AF; essa è perpendicolare alla retta BC, perchè nei due triangoli ADE, FDE isosceli

le due rette che congiungono i due vertici col punto medio della base comune sono perpendicolari alla base medesima, e perciò formano una sola linea retta, la quale non può essere altra che la retta AF.

Altro modo. Da due punti D, E della retta BC come centri (fig. 29) e coi raggi eguali alle distanze DA, EA descrivo due circonferenze, e pei punti A, F d'intersezione tiro la retta AF, la quale sarà perpendicolare alla retta BC.

PROBLEMA II.

Per un punto dato condurre una retta parallela ad una retta data.

Sia dato il punto A e la retta BC (fig. 30). Segno un punto D sulla retta BC, taglio la parte DE eguale alla distanza DA, dal centro A col raggio AD descrivo l'arco DF, porto la distanza AE dal punto D al punto G dell'arco DF, e tiro la retta AG, la quale sarà parallela alla retta BC, perchè il quadrilatero AEDG, avendo i lati opposti eguali, è parallelogrammo.

Altro modo. Col centro D a discrezione (fig. 31) e col raggio eguale alla distanza DA descrivo una circonferenza segante la retta BC nei due punti E, F, porto la distanza AE dal punto F al punto G della circonferenza, e tiro la retta AG, la quale sarà parallela alla retta BC. In fatti, essendo eguali gli angoli ADE, GDF (T. IV), la retta che dimezza l'angolo EDF del triangolo isoscele DEF deve dimezzare ancora l'angolo ADG del triangolo isoscele DAG, e perciò le rette AG, EF perpendicolari alla medesima retta (T. III. cor. I) sono parallele. .

Altro modo. Col centro A descrivo un arco tangente la retta BC (fig. 32), con lo stesso raggio e col centro preso sulla retta BC descrivo un altro arco, a cui pel punto A conduco la tangente.

Altro modo. Si ponga un lato della squadra nella direzione della retta BC (fig. 33), e fermata la riga nella direzione di un altro lato, si faccia scorrere la squadra fino a che il lato parallelo alla retta BC (T. IX) non passa pel punto dato A.

PROBLEMA III.

Dimezzare una retta data.

Sia data la retta AB (fig. 34). Descrivo due circonferenze dai centri A, B con uno stesso raggio a discrezione, e con la retta CD tirata tra i due punti comuni di quelle taglio la retta AB nel punto E.

Nei due triangoli CAB, DAB isosceli le due rette che congiungono i due vertici col punto medio della base comune sono perpendicolari alla base medesima, e perciò formano una sola linea retta, la quale non può essere altra che la retta CD.

Altro modo. Facciasi con la squadra un parallelogrammo (fig. 35) di cui la retta AB sia diagonale, e questa sarà divisa per metà dall'altra diagonale.

PROBLEMA IV.

Fare un angolo eguale ad un angolo dato.

Nel punto dato A e con la retta data AB (fig. 36) si voglia fare un angolo eguale all'angolo dato C. Dal centro C con un raggio arbitrario si descriva l'arco DE tra i lati dell'angolo, e dal centro A con lo stesso raggio si descriva l'arco FG col termine F sulla retta AB; la distanza DE si porti dal punto F al punto H dell'arco FG, e si conduca la retta AH, la quale farà l'angolo HAF eguale all'angolo C (T. IV.)

PROBLEMA V.

Trasformare un triangolo in parallelogrammo.

Sia il triangolo ABC (fig. 37). Dimezzo due lati BC, AC nei punti D, E, tiro la retta DE, e do al triangolo ECD la posizione EAF, girandolo intorno al punto E. Le due rette ED, EF sono direttamente opposte, perchè gli angoli CED, AEF sono eguali; le due rette BC, AF sono parallele, perchè gli angoli ACB, CAF sono eguali; le due rette BD, AF sono eguali, perchè le due rette BD, CD sono eguali; dunque il quadrilatero ABDF è parallelogrammo.

PROBLEMA VI.

Trasformare un parallelogrammo in un altro che abbia un angolo eguale ad un angolo dato.

Sia dato il parallelogrammo ABCD e l'angolo V (fig. 11 e 12). Nel punto B e con la retta BC facciasi l'angolo CBE eguale all'angolo V, sulla retta AD segata dalla retta BE nel punto E si tagli la parte EF eguale al lato AD, e si conduca la retta CF; il parallelogrammo EBCF coll'angolo EBC eguale all'angolo V sarà equivalente al parallelogrammo ABCD (T. XV).

PROBLEMA VII.

Trasformare un parallelogrammo in un altro che abbia un lato eguale ad una retta data.

Sia dato il parallelogrammo ABCD e la retta PQ (fig. 13). Nella direzione BA pongo BE=PQ, taglio la retta BC nel punto F con la retta AF parallela alla

retta EC, e compisco il parallelogrammo EBFG, il quale sarà equivalente al parallelogrammo ABCD.

PROBLEMA VIII.

Trasformare un poligono in un parallelogrammo il quale abbia un lato eguale ad una retta data, ed un angolo eguale ad un angolo dato.

Il poligono dato si risolve in triangoli, conducendo da un vertice del poligono ai vertici opposti altrettante rette; ciascun triangolo si trasforma in un parallelogrammo (P. V), il quale abbia un angolo eguale all'angolo dato (P. VI), ed un lato eguale alla retta data (P. VII); e i parallelogrammi si congiungono pei loro lati eguali dirittamente.

PROBLEMA IX.

Trasformare un rettangolo in quadrato.

Sia dato il rettangolo ABCD (fig. 38). Sul lato maggiore BC taglio BE = BA, descrivo la semicirconferenza BFC, e segno il punto F dove la incontra la retta EF perpendicolare alla retta BC; il quadrato della retta BF sarà equivalente al rettangolo ABCD.

La retta CF seghi la retta AD nel punto G. Il parallelogrammo ABCD si può trasformare nell'altro BCGH, e questo nell'altro HBFI; ma l'angolo BFC è retto (T. XI), e i lati BF, BH sono eguali, perchè i due triangoli BEF, BAH sono eguali, avendo i lati BE, BA eguali, gli angoli BEF, BAH retti, e gli angoli EBF, ABH amendue complementi dello stesso angolo ABF; dunque il parallelogrammo HBFI è un quadrato equivalente al rettangolo ABCD.

PROBLEMA X.

Calcolare un triangolo, conoscendo i tre lati.

Un triangolo ABC (fig. 39) è quanto il semiprodotto della base BC per la perpendicolare AD (T.XXIII); conoscendo i tre lati del triangolo, la perpendicolare si può calcolare nel seguente modo: la differenza tra il quadrato del lato AB e la somma dei quadrati dei lati CA, CB equivale al doppio rettangolo delle due rette CD, CB (T.XVIII); perciò, divisa la detta differenza pel doppio della retta CB, il quoziente sarà la lunghezza della retta CD; tolto il quadrato della retta CD dal quadrato della retta CA, il residuo sarà il quadrato della perpendicolare AD (T.XIX), e quindi la radice quadrata del residuo sarà la lunghezza della perpendicolare.

1° Esempio. $AB = 25$, $BC = 28$, $AC = 17$ (fig.39);

$$AB \times AB = 25 \times 25 = 625$$
$$BC \times BC = 28 \times 28 = 784$$
$$AC \times AC = 17 \times 17 = 289$$
$$(784 + 289) - 625 = 448$$
$$CD = \frac{448}{56} = 8, \quad CD \times CD = 8 \times 8 = 64$$
$$289 - 64 = 225, \quad AD = \sqrt{225} = 15$$
$$\text{triangolo } ABC = \frac{28 \times 15}{2} = 210.$$

2° Esempio. $AB = 136$, $BC = 29$, $AC = 125$ (fig.40);

$$AB \times AB = 136 \times 136 = 18496$$
$$BC \times BC = 29 \times 29 = 841$$
$$AC \times AC = 125 \times 125 = 15625$$
$$18496 - (841 + 15625) = 2030$$
$$CD = \frac{2030}{58} = 35, \quad CD \times CD = 35 \times 35 = 1225$$
$$15625 - 1225 = 14400, \quad AD = \sqrt{14400} = 120$$
$$\text{triangolo } ABC = \frac{29 \times 120}{2} = 1740.$$

Più speditamente si calcola la quantità del triangolo, moltiplicando la semisomma dei tre lati per le sue tre differenze da quelli, ed estraendo la radice quadrata dal prodotto.

1° Esempio

$$AB = 25 \quad BC = 28 \quad AC = 17$$
$$\text{somma} = 70 \qquad \text{metà} = 35$$

$$35 - 25 = 10 \qquad 35 - 28 = 7 \qquad 35 - 17 = 18$$

$$35 \times 10 \times 7 \times 18 = 44100$$

$$\sqrt{44100} = 210$$

$$\text{triangolo } ABC = 210$$

2° Esempio

$$AB = 136 \quad BC = 29 \quad AC = 125$$
$$\text{somma} = 290 \qquad \text{metà} = 145$$

$$145 - 136 = 9 \qquad 145 - 29 = 116 \qquad 145 - 125 = 20$$

$$145 \times 9 \times 116 \times 20 = 3027600$$

$$\sqrt{3027600} = 1740$$

$$\text{triangolo } ABC = 1740$$

PROBLEMA XI.

Come si misura un poligono.

Il poligono si risolve in triangoli, conducendo delle rette da un vertice ad altri vertici del poligono — si misura ciascun triangolo — e si fa la somma delle loro quantità.

Esempio. Sia il pentagono ABCDE (fig. 41), AB = 15, BC = 9, AC = 20, CD = 24, AD = 18, DE = 13, AE = 11, sarà:

$$ABC = \sqrt{22 \times 7 \times 13 \times 2} = \sqrt{4004} = \quad 63,27$$
$$ACD = \sqrt{31 \times 11 \times 7 \times 13} = \sqrt{31031} = 176,15$$
$$ADE = \sqrt{21 \times 3 \times 8 \times 10} = \sqrt{5040} = \quad 70,99$$
$$\text{poligono ABCDE} = \quad 310,41$$

Altro modo. Il poligono si risolve in triangoli e trapezi, tracciando una direttrice tra due vertici del poligono, e le perpendicolari alla direttrice pei vertici rimanenti.

Esempio. Sia il poligono ABCDEF diviso in quattro triangoli e due trapezi dalla direttrice AD e dalle perpendicolari BG, FH, EI, CK, e sia AG = 4, BG = 6, GH = 2, FH = 7, HI = 5, EI = 6, IK = 3, CK = 5, KD = 3.

$$AGB = \frac{AG \times BG}{2} = \frac{4 \times 6}{2} = \ldots\ldots\ldots\ldots 12$$

$$AHF = \frac{AH \times FH}{2} = \frac{6 \times 7}{2} = \ldots\ldots\ldots 21$$

$$FHIE = \frac{FH + EI}{2} \times HI = 6,5 \times 5 = \ldots\ldots 32,5$$

$$BGKC = \frac{BG + CK}{2} \times GK = 5,5 \times 10 = \ .\ 55$$

$$EID = \frac{ID \times EI}{2} = \frac{6 \times 6}{2} = \ldots\ldots\ldots\ldots 18$$

$$CKD = \frac{KD \times CK}{2} = \frac{3 \times 5}{2} = \ldots\ldots\ldots\ldots 7,5$$

$$\text{poligono ABCDEF} = \quad 146$$

A
B
D
C
A
B
A
C
5
D
F
D
A
E
8
B
C
F
9
A
I
17
A
H
14
A
L
E
D
K
D
C
B
C
15
A
D
I
E
K
H
G
I
B
C
F
D
D
B
C
P
Q

21
D
C
E A
B
22
25
F
A E C
31
G
D
F C
29
B D
A
E C
F
41
D
E
C
A
B
35
A B
C
E B
D
F E
G
D E
K D
H I
C
36
C
A
D